# CE301 - Estatística Básica

## Introdução às variáveis aleatórias


Paulo Justiniano Ribeiro Jr

Departamento de Estatística
Setor de Ciências Exatas
Universidade Federal do Paraná


5 de maio de 2026

# Introdução (quadro): Exercício 0

Uma urna contém seis bolas brancas e nove bolas vermelhas. Serão retiradas, sequencialmente, três bolas da urna. A cada bola observa-se a cor. Se a bola for vermelha ela é retornada à urna e se for branca ela é posta de lado.

1. Forneça o espaço amostral do experimento.
2. Calcule probabilidade de cada elemento do espaço amostral.
3. Qual a probabilidade de não se obter todas as bolas da mesma cor?
4. Qual a probabilidade de se retirar ao menos duas bolas brancas?
5. Qual a probabilidade de retirar três vermelhas sabendo-se que ao menos uma das bolas é vermelha?
6. Se a primeira bola for branca, qual a probabilidade de obter três bolas brancas?

# Atribuindo probabilidades

- Sair cara no lançamento de uma moeda.
- A soma de dois dados ser 6.
- Uma ninhada de cinco cães ter três fêmeas.
- Um jogador de basquete acertar todos 10 lance-livres arremessados em um jogo.
- Uma seguradora registrar mais de 10 sinistros em um dia.
- Uma região registrar chuva (precipitação) em abril superior a 200 mm.
- Um paciente responder a certo tratamento.
- Uma pessoa avaliar positivamente um filme.

# Atribuindo probabilidades

## Modelos probabilísticos

- Padrões de comportamento.
- Situações *estilizadas* – modelos probabilísticos.
- Variáveis aleatórias.
- Distribuições de probabilidades.

Muitas vezes a sociedade "organiza" o mundo de forma a trazer previsibilidade a partir fenômenos de ocorrência imprevisível.

Como ter previsibilidade a partir da imprevisibilidade?

# Variáveis aleatórias

"Simplificações" (funções) de interesse do espaço amostral.
São "dispositivos" para atribuir probabilidades a certos padrões de comportamento.

Um exemplo simples: quantos machos há em uma ninhada de três cães?
(estamos interessados somente no número de machos e não na ordem dos nascimentos)

Espaço amostral:

$$\Omega = \{(F,F,F), (F,F,M), (F,M,F), (M,F,F), (F,M,M), (M,F,M), (M,M,F), (M,M,M)\}$$

Variável aleatória: $Y$ : número de machos

Domínio: $y \in \{0, 1, 2, 3\}$

# Variáveis aleatórias

- Definindo a variável aleatória:

$$Y: \text{ número de machos em ninhada com 3 cães.}$$

- Verificando seus possíveis valores (*domínio*):

$$y \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

- Atribuindo probabilidades a seus possíveis valores:

| y | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| Probabilidades | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

A tabela pode ser substituída por uma equação que produz seus valores:

$$P[Y = y] = \binom{3}{y}(1/2)^y(1 - 1/2)^{3-y} = \binom{n}{y}(p)^y(1 - p)^{n-y}.$$

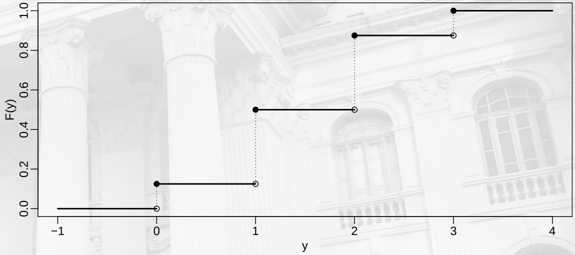
Qual o valor médio da variável aleatória?

$$\text{E}[Y] = \sum_i y_i P[Y = y_i] = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1{,}5$$

# Probabilidades em gráficos

função de probabilidade


função (de probabilidade) acumulada



# Calculando Probabilidades

Revisitando a lista de problemas:

- Vamos formalizar as soluções.
- Pode-se representar problemas *reais* parecidos ou análogos.

# Exercício 1

Considere o lançamento de um dado normal.

1. Quais os resultados possíveis?
2. Qual a probabilidade de sair a face 5?
3. Qual a probabilidade de cada possível resultado?
4. Qual a probabilidade de sair uma face que seja um número divisível por 3?

# Exercício 1

## Suposições e modelo teórico

- Ocorre uma entre seis possíveis faces.
- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- igualmente prováveis.

Variável aleatória: $Y$ : face do dado

Tabela 1. Distribuição de probabilidades da face no lançamento de um dado

| Face (y) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilidades $P[Y = y]$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |
| Prob. Acum. $P[Y \leq y] = F(y)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{3}{6}$ | $\frac{4}{6}$ | $\frac{5}{6}$ | $\frac{6}{6}$ |

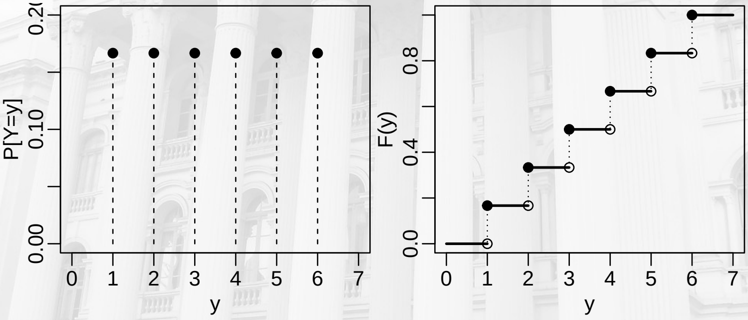
Função de Probabilidades: $P[Y = y_i] = \dfrac{1}{6} \quad \forall i$

# Generalizando

- Definimos uma variável aleatória (v.a.) que associa valores ao resultado do experimento. Neste último caso a associação é simples e direta, 1-1.
- Distribuição de probabilidades: como o total da probabilidade (1) se distribui entre os possíveis valores da v.a..
- A distribuição da v.a. pode ser descrita por uma tabela, ou, caso possível, por uma *fórmula* (uma função de probabilidades) que atribui seus valores.
- Neste caso dizemos ter uma família de distribuição especial ou conhecida.

# Generalizando a solução: Exercício 1

$$Y : \text{face de um dado (v.a. discreta)}$$
$$y \in \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$Y \sim \mathrm{U_d}(n = 6)$$
$$P[Y = y] = \frac{1}{n} = \frac{1}{6}$$



# Generalizando a solução: Exercício 1

$Y$ : face de um dado (v.a. discreta)

Tabela 2. Distribuição de probabilidades da face no lançamento de um dado

| Face (y) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilidades $P[Y = y]$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

Valor médio:

$$\mathrm{E}[Y] = \sum_i y_i P[Y = y_i] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5.$$

Variabilidade (variância):

$$\mathrm{V}[Y] = \sum_i (y_i - \mathrm{E}[Y])^2 P[Y = y_i] = (1 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + (6 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} = 2.917.$$

# Exercício 2

Considere o lançamento de um dado não usual, no qual a probabilidade de cada face é proporcional ao seu valor.

1. Quais os resultados possíveis?
2. Qual a probabilidade de sair a face 5?
3. Qual a probabilidade de cada possível resultado?
4. Qual a probabilidade de sair uma face que seja um número divisível por 3?

# Exercício 2

## Suposições e modelo probabilístico (teórico)

- Ocorre uma entre seis possíveis faces.
- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
- As faces não são igualmente prováveis.

Variável aleatória: $Y$ : face do dado

Tabela 3. Distribuição de probabilidades da face no lançamento de um dado

| Face (y) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P[Y = y]$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{2}{21}$ | $\frac{3}{21}$ | $\frac{4}{21}$ | $\frac{5}{21}$ | $\frac{6}{21}$ |
| $P[Y \leq y]$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{3}{21}$ | $\frac{6}{21}$ | $\frac{10}{21}$ | $\frac{15}{21}$ | $\frac{21}{21}$ |

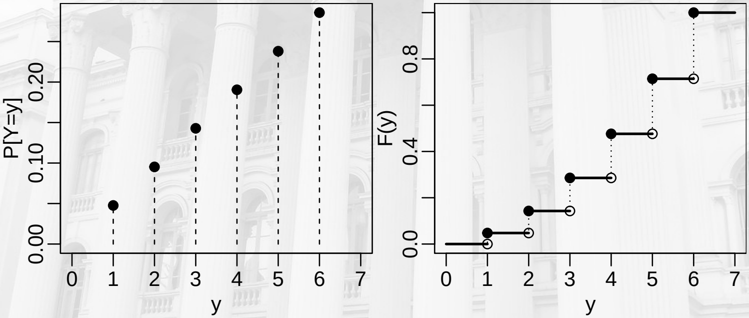
# Generalizando a solução do Exercício 2

Notação:

$$Y \text{ : face do dado "especial" (v.a. discreta)}$$

$$y \in \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$P[Y = y_i] = \frac{y_i}{\sum_i y_i} \text{ (função de probabilidades)}$$



# Generalizando a solução: Exercício 2

$Y$ : face do dado "especial"(v.a. discreta)

Tabela 4. Distribuição de probabilidades da face no lançamento de um dado

| Face (y) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilidades $P[Y = y]$ | $\frac{1}{21}$ | $\frac{2}{21}$ | $\frac{3}{21}$ | $\frac{4}{21}$ | $\frac{5}{21}$ | $\frac{6}{21}$ |

Valor médio:

$$\mathrm{E}[Y] = \sum_i y_i P[Y = y_i] = 1 \cdot \frac{1}{21} + 2 \cdot \frac{2}{21} + \ldots + 6 \cdot \frac{6}{21} = 4.333.$$

Variabilidade (variância):

$$\mathrm{V}[Y] = \sum_i (y_i - \mathrm{E}[Y])^2 P[Y = y_i] = (1 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + (6 - 3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} = 2.222.$$

# Exercício 4

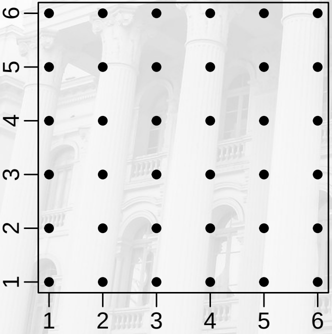
Considere o lançamento de dois dados e o interesse está na soma das faces.

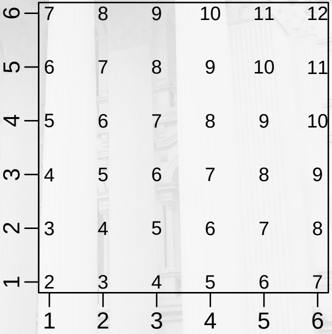
1. Quais os resultados possíveis?
2. Qual a probabilidade da soma ser 5?
3. Qual a probabilidade de cada possível resultado?
4. Qual a probabilidade que a soma das faces seja um número divisível por 3?

# Exercício 4

## Suposições e modelo teórico

- $\Omega = \{(1,1),(1,2),\dots(2,1),(2,2),\dots(6,5),(6,6)\}$ $n(\Omega) = 36$
- $Y$: soma das faces no lançamento de dois dados
- $y \in \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$



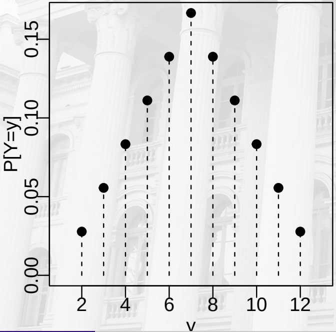



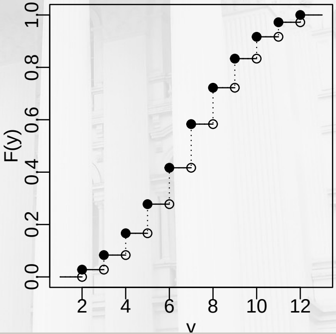
# Exercício 4 (cont)

Tabela 5. Distribuição de probabilidades da soma das faces no lançamento de dois dados

| $y$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P[Y = y]$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{1}{36}$ |
| $F(y) = P[Y \leq y]$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{6}{36}$ | $\frac{10}{36}$ | $\frac{15}{36}$ | $\frac{21}{36}$ | $\frac{26}{36}$ | $\frac{30}{36}$ | $\frac{33}{36}$ | $\frac{35}{36}$ | 1 |

A tabela pode ser expressa pela equação: $P[Y = y] = \frac{6-|y-7|}{36}$.



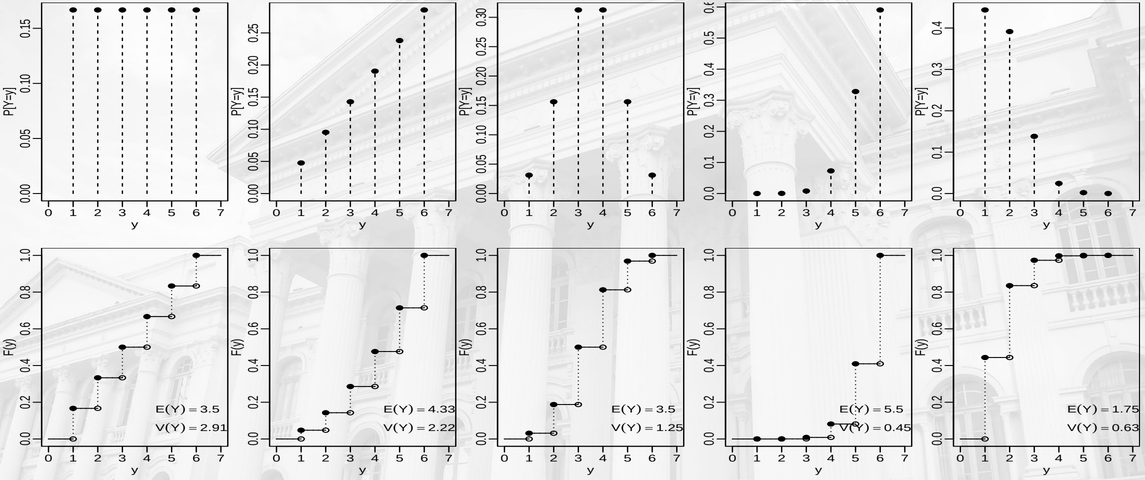
# Variáveis aleatórias discretas

- $Y$ tem valores em um conjunto enumerável.
- Possui um função de probabilidades $P[Y = y]$ com valores expressos por uma tabela ou fórmula.
- Também pode ser caracterizada por uma função acumulada:

$$F(y_i) = P[Y \leq y_i].$$

- Pode-se calcular medidas que expressam características da distribuição tais como:
  - Média (valor esperado, esperança): $\text{E}[Y] = \sum_i y_i \cdot P[Y = y_i]$,
  - Variância : $\text{Var}[Y] = \sum_i (y_i - \text{E}[Y])^2 \cdot P[Y = y_i]$,
  - mediana, quantis, etc.

# Variáveis aleatórias discretas



# Exercício 6

Em um teste múltipla escolha de quatro questões, deve-se marcar uma alternativa em cada questão.
Cada questão é composta de cinco alternativas das quais apenas uma é correta.
Qual a probabilidade de um indivíduo acertar por mero acaso alguma questão?

# Exercício 6

A resposta é mais simples se calcularmos pelo complementar: $P[\cdot] = 1 - (0{,}8)^4 = 0.59$, mas
Organizando o problema ...

- $\Omega = \{(CCCC), (CCCE), \ldots, (EEEE)\} \quad n(\Omega) = 16$
- $Y$: número de questões certas
- $y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $P[Y = y] = \binom{4}{y}(1/5)^y(4/5)^{4-y} = \binom{n}{y}p^y(1-p)^{n-y}$ (distribuição Binomial!)
- Evento de interesse:

$$P[Y \geq 1] = 1 - P[Y = 0] = 1 - \binom{4}{0}(1/5)^0(4/5)^4 = 0.59$$

Código **R**:

```
1 - dbinom(0, size=4, prob=1/5)
## [1] 0.5904
```

# Exercício 6

A resposta é mais simples se calcularmos pelo complementar: $P[\cdot] = 1 - (0{,}8)^4 = 0.59$, mas

Organizando o problema ...

- $\Omega = \{(CCCC), (CCCE), \ldots, (EEEE)\}$ $n(\Omega) = 16$
- $Y$: número de questões certas
- $y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
- $P[Y = y] = \binom{4}{y}(1/5)^y(4/5)^{4-y} = \binom{n}{y}p^y(1-p)^{n-y}$ (distribuição Binomial!)
- Evento de interesse:

$$P[Y \geq 1] = 1 - P[Y = 0] = 1 - \binom{4}{0}(1/5)^0(4/5)^4 = 0.59$$

Valor médio:

$$\mathrm{E}[Y] = \sum_i y_i P[Y = y_i] = 0 \cdot P[Y = 0] + 1 \cdot P[Y = 1] + 2 \cdot P[Y = 2] + 3 \cdot P[Y = 3] + 4 \cdot P[Y = 4] = n \cdot p = 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}8$$

Variabilidade (variância):

$$\mathrm{V}[Y] = \sum_i (y_i - \mathrm{E}[Y])^2 P[Y = y_i] = \ldots = n \cdot p \cdot (1 - p) = 0.640.$$

# Exercício 3

Um dado foi fabricado com o centro em madeira leve e cada face com uma chapa metálica porém de diferentes características (espessura/densidade) em cada face?

1. Quais os resultados possíveis?
2. Como calcular a probabilidade de sair a face 5?
3. Como calcular a probabilidade de cada possível resultado?
4. Como calcular a probabilidade de sair uma face que seja um número divisível por 3?

# Exercício 4

## Suposições e procedimento empírico

- ocorre uma entre seis possíveis faces
- $\Omega = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\}$
- as faces podem não ser igualmente prováveis
- experimento: lançou-se o dado 1000 vezes obtendo-se

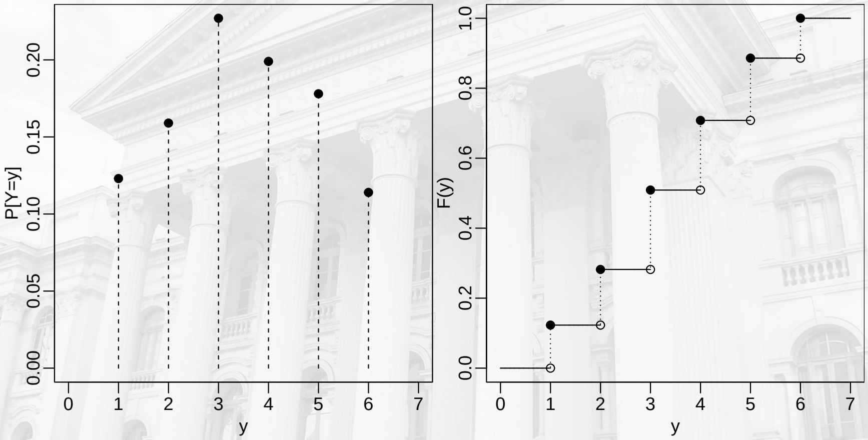
Variável aleatória: $Y$ : face do dado

Tabela 6. Distribuição de probabilidades da face no lançamento de um dado

| Face (y) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilidades | $\frac{123}{1000}$ | $\frac{159}{1000}$ | $\frac{227}{1000}$ | $\frac{199}{1000}$ | $\frac{178}{1000}$ | $\frac{114}{1000}$ |

# Exercício 4 (cont)

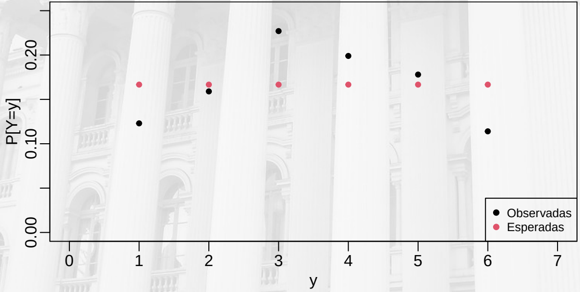
## Distribuição de probabilidades obtida *empiricamente*



# Exercício 3 (cont)

Uma pergunta válida:
Os valores observados são incompatíveis com a hipótese de equiprobabilidade?

| Face (y) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probs Observadas | $\frac{123}{1000}$ | $\frac{159}{1000}$ | $\frac{227}{1000}$ | $\frac{199}{1000}$ | $\frac{178}{1000}$ | $\frac{114}{1000}$ |
| Probs "Esperadas" | $\frac{167}{1000}$ | $\frac{167}{1000}$ | $\frac{167}{1000}$ | $\frac{167}{1000}$ | $\frac{166}{1000}$ | $\frac{166}{1000}$ |



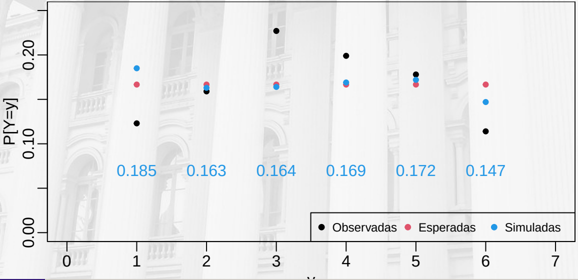
# Exercício 3 (cont)

Uma pergunta válida:

Os valores observados são incompatíveis com a hipótese de equiprobabilidade?

Quanto pode variar mesmo sendo equiprováveis?

| Face (y) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probs Observadas | $\frac{123}{1000}$ | $\frac{159}{1000}$ | $\frac{227}{1000}$ | $\frac{199}{1000}$ | $\frac{178}{1000}$ | $\frac{114}{1000}$ |
| Probs "Esperadas" | $\frac{167}{1000}$ | $\frac{167}{1000}$ | $\frac{167}{1000}$ | $\frac{167}{1000}$ | $\frac{166}{1000}$ | $\frac{166}{1000}$ |
| Probs em uma Simulação | $\frac{185}{1000}$ | $\frac{163}{1000}$ | $\frac{164}{1000}$ | $\frac{169}{1000}$ | $\frac{172}{1000}$ | $\frac{147}{1000}$ |



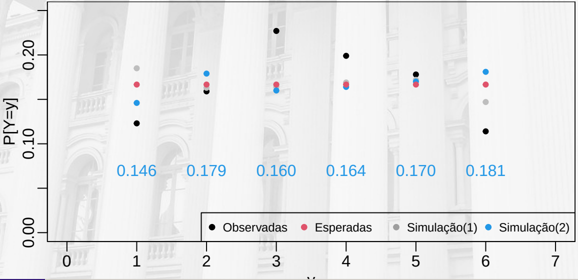
# Exercício 3 (cont)

Uma pergunta válida:

Os valores observados são incompatíveis com a hipótese de equiprobabilidade?

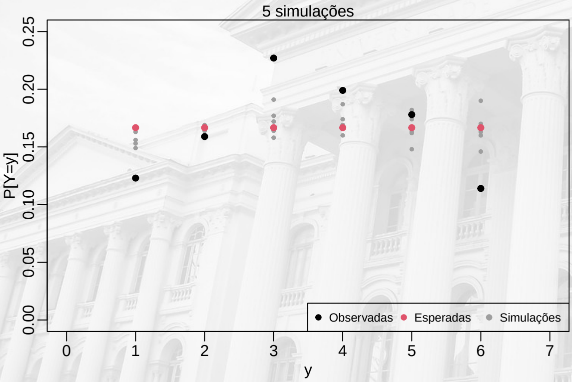
Quanto pode variar mesmo sendo equiprováveis?

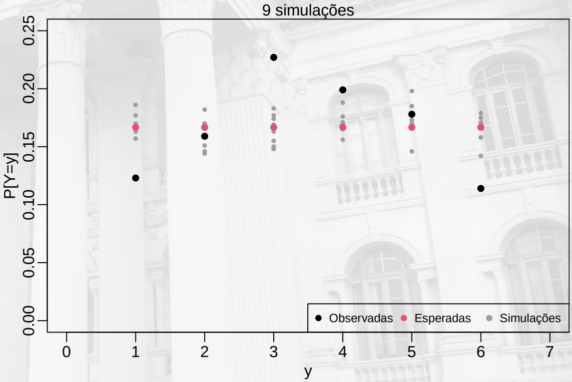
| Face (y) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probs Observadas | $\frac{123}{1000}$ | $\frac{159}{1000}$ | $\frac{227}{1000}$ | $\frac{199}{1000}$ | $\frac{178}{1000}$ | $\frac{114}{1000}$ |
| Probs "Esperadas" | $\frac{167}{1000}$ | $\frac{167}{1000}$ | $\frac{167}{1000}$ | $\frac{167}{1000}$ | $\frac{166}{1000}$ | $\frac{166}{1000}$ |
| Probs em outra simulação | $\frac{146}{1000}$ | $\frac{179}{1000}$ | $\frac{160}{1000}$ | $\frac{164}{1000}$ | $\frac{170}{1000}$ | $\frac{181}{1000}$ |



# Exercício 3 (cont)

Uma pergunta válida:
Os valores observados são incompatíveis com a hipótese de equiprobabilidade?
Quanto pode variar mesmo sendo equiprováveis?



# Exercício 3 (cont)

Uma pergunta válida:
Os valores observados são incompatíveis com a hipótese de equiprobabilidade?
Quanto pode variar mesmo sendo equiprováveis?