

Variáveis aleatórias

Variáveis aleatórias discretas e contínuas; esperança e variância

Prof. Me. Lineu Alberto Cavazani de Freitas

Departamento de Estatística
Laboratório de Estatística e Geoinformação





Introdução

Variáveis aleatórias

- ▶ Variáveis aleatórias são uma continuação do assunto sobre experimentos aleatórios.
- ▶ Uma **variável aleatória** (v.a) associa um **valor numérico** a cada resultado de um fenômeno aleatório.
- ▶ **Letras maiúsculas** denotam a variável aleatória (X , Y , etc).
- ▶ **Letras minúsculas** denotam os **valores observados** da variável aleatória (x , y , etc).

Variáveis aleatórias

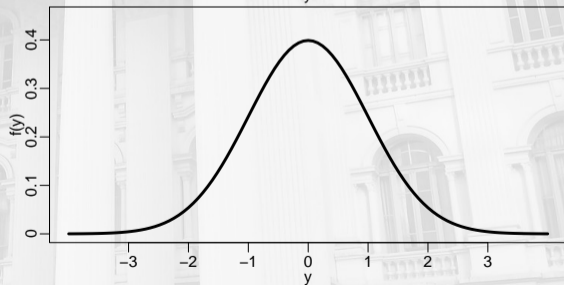
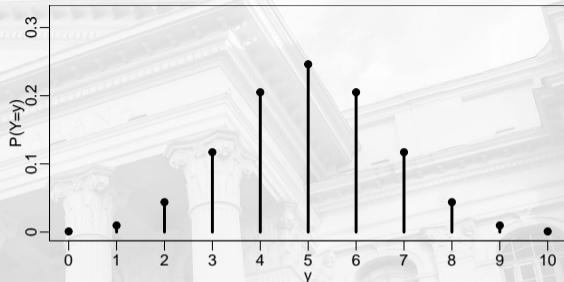
- ▶ Os tipos de variáveis aleatórias estão associados ao tipo do espaço amostral.
- ▶ Uma variável aleatória é **discreta** se seu **espaço amostral** é discreto.
- ▶ Uma variável aleatória é **contínua** se seu **espaço amostral** é contínuo.
- ▶ Alguns possíveis espaços amostrais são:
 - ▶ Toda a reta real.
 - ▶ Valores reais estritamente positivos.
 - ▶ Valores positivos mas com zeros sendo possíveis resultados.
 - ▶ Intervalos restritos (proporções, índices).
 - ▶ Contagens (limitadas ou ilimitadas).
 - ▶ Dentre outras.

Exemplos

- ▶ Y_1 : Qualidade de uma peça produzida.
 - ▶ $Y_1 \in \{0,1\}$, 1 para defeituosa e 0 para não defeituosa
- ▶ Y_2 : Número de caras observadas no lançamento de 3 moedas.
 - ▶ $Y_2 \in \{0,1,2,3\}$.
- ▶ Y_3 : Km em que ocorre um defeito em uma pista de 20 km.
 - ▶ $Y_3 \in [0,20]$.
- ▶ Y_4 : Proporção de indivíduos que apresenta determinada característica.
 - ▶ $Y_4 \in [0,1]$.
- ▶ Y_5 : Peso de um indivíduo.
 - ▶ $Y_5 \in (0,\infty)$.

Variáveis aleatórias

- ▶ Existem **funções** que atribuem **probabilidades** aos possíveis valores de uma variável aleatória.
- ▶ No caso discreto esta função é chamada de **função de probabilidade** (fp).
- ▶ No caso contínuo esta função é chamada de **função densidade de probabilidade** (fdp).
- ▶ Podemos descrever o comportamento destas funções por meio de medidas como **média, variância e covariância**.





Variáveis aleatórias discretas

Variáveis aleatórias discretas

- ▶ Considere uma **variável aleatória discreta** Y , que assume os valores y_1, y_2, \dots, y_n .
- ▶ A **função de probabilidade** (fp) atribui probabilidades a cada possível valor de Y . É dada por:

$$P(Y = y_i) = p(y_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

- ▶ As propriedades da função seguem as regras de probabilidades, ou seja:
 - ▶ A probabilidade de cada valor deve estar entre 0 e 1.

$$0 \leq p(y_i) \leq 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

- ▶ A soma de todas as probabilidades é igual a 1.

$$\sum_i p(y_i) = 1.$$

Exemplo

Considere o experimento aleatório que consiste no lançamento de 3 moedas honestas. Seja Y a variável aleatória que representa o número de caras nos 3 lançamentos:

- Defina os eventos.
- Qual é o espaço amostral?
- Encontre a função probabilidade de Y .
- Verifique se as propriedades de uma função de probabilidades são atendidas.

Exemplo

a) Defina os eventos.

- ▶ C: cara, K: coroa.

b) Qual é o espaço amostral?

$$\Omega = \{(C,C,C), (C,C,K), (C,K,C), (K,C,C), (C,K,K), (K,C,K), (K,K,C), (K,K,K)\}$$

c) Encontre a função probabilidade de Y .

- ▶ Y : número de caras.
- ▶ $y \in \{0,1,2,3\}$.
- ▶ Função de probabilidade:

y	0	1	2	3
Prob.	1/8	3/8	3/8	1/8

d) Verifique se as propriedades de uma função de probabilidades são atendidas.

- ▶ As probabilidades estão entre 0 e 1?
 - ▶ Sim.
- ▶ A soma das probabilidades é igual a 1?
 - ▶ $1/8 + 3/8 + 3/8 + 1/8 = 1$.

Função de distribuição de probabilidade

- ▶ Em algumas situações pode ser interessante calcular a **probabilidade acumulada** até um certo valor da variável aleatória.
- ▶ Para isso, podemos usar a **função de distribuição acumulada**, também chamada de **função acumulada**.
- ▶ Trata-se de um análogo à distribuição de frequência acumulada.
- ▶ A função de distribuição ou função acumulada de probabilidade de uma variável aleatória Y é dada pela expressão:

$$F(y) = P(Y \leq y)$$

Exemplo

Retomando o exemplo do lançamento de 3 moedas honestas:

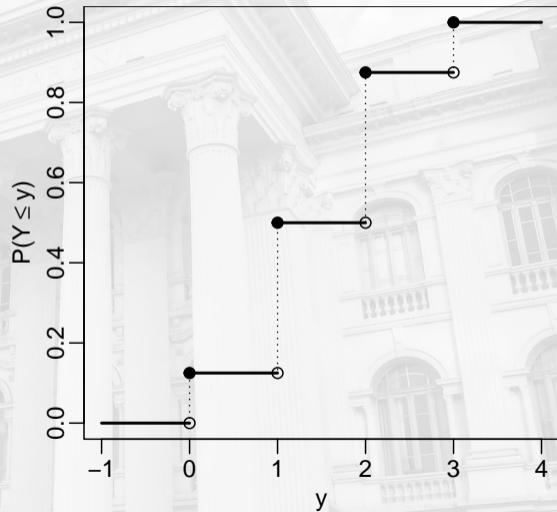
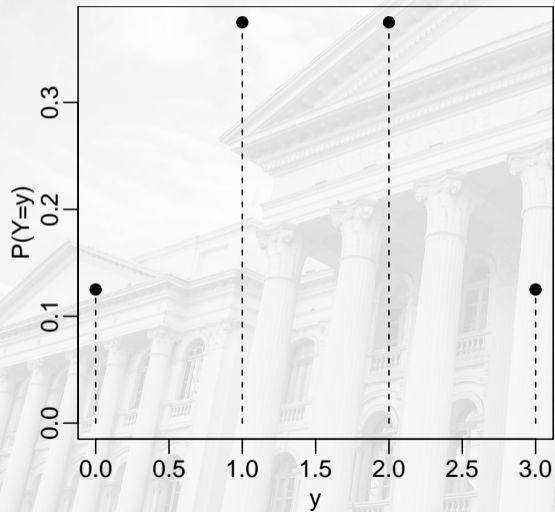
- ▶ Y : número de caras.
- ▶ $y \in \{0,1,2,3\}$.
- ▶ Função de probabilidade:

y	0	1	2	3
Prob.	1/8	3/8	3/8	1/8
Prob.Ac.	1/8	4/8	7/8	8/8

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0 \\ 1/8, & \text{se } 0 \leq y < 1 \\ 4/8, & \text{se } 1 \leq y < 2 \\ 7/8, & \text{se } 2 \leq y < 3 \\ 1, & \text{se } y \geq 3 \end{cases}$$

Exemplo

De forma gráfica:



Esperança e variância para variáveis aleatórias discretas

- ▶ Sabemos que a descrição completa do comportamento de uma variável aleatória discreta é feita por meio da sua função de probabilidade.
- ▶ Desta forma presume-se que qualquer quantidade destinada a **resumir** os valores observados da variável devem envolver esta função.
- ▶ Podemos obter resumos numéricos da função de probabilidade como média, mediana, moda, variância, desvio padrão.

Esperança

- ▶ A **média**, também chamada de **valor esperado** ou **esperança**, representa o ponto de equilíbrio da distribuição dos valores da variável aleatória.
- ▶ É dada pelo somatório do produto entre cada valor e sua respectiva probabilidade (tal como um média ponderada).

$$\mu = E(Y) = \sum_y y \times p(y).$$

Variância

- ▶ Para variáveis aleatórias, a medida de dispersão mais utilizada é a **variância**.
- ▶ No caso discreto é dada pelo somatório dos desvios em relação a média ao quadrado, vezes a respectiva probabilidade.

$$\sigma^2 = E[(Y - \mu)^2] = \sum_y (y - \mu)^2 \times p(y).$$

- ▶ De forma alternativa:

$$\sigma^2 = V(Y) = E(Y^2) - \mu^2.$$

- ▶ A raiz quadrada positiva da variância é chamada de desvio padrão de Y , denotado por σ .

Exemplo

Retomando o exemplo do lançamento de 3 moedas honestas:

- ▶ Y : número de caras.
- ▶ $y \in \{0,1,2,3\}$.
- ▶ Função de probabilidade:

y	0	1	2	3
Prob.	1/8	3/8	3/8	1/8
Prob.Ac.	1/8	4/8	7/8	8/8

$$E(Y) = (0 \times 1/8) + (1 \times 3/8) + (2 \times 3/8) + (3 \times 1/8) = 1,5.$$

$$V(Y) = [(0 - 1,5)^2 \times 1/8] + [(1 - 1,5)^2 \times 3/8] + [(2 - 1,5)^2 \times 3/8] + [(3 - 1,5)^2 \times 1/8] = 0,75$$



Variáveis aleatórias contínuas

Variáveis aleatórias contínuas

- ▶ Para variáveis aleatórias contínuas **não é possível atribuir probabilidades a valores pontuais** do domínio.
- ▶ A função que descreve a densidade de probabilidade dos possíveis valores da variável é dada por uma **curva**.
- ▶ Para obter probabilidades calculamos **áreas** abaixo desta curva, e **a área abaixo de um ponto é zero**.
- ▶ Por esta razão atribuímos probabilidades a intervalos de valores.
- ▶ Portanto:
 - ▶ $P(Y = y) = 0$.
 - ▶ $P(a \leq Y \leq b) = P(a < Y \leq b) = P(a \leq Y < b) = P(a < Y < b)$.

Variáveis aleatórias contínuas

- ▶ Considere uma **variável aleatória contínua** Y .
- ▶ A **função densidade de probabilidade** (fdp) atribui probabilidades a intervalos de valores (a,b) da variável Y :

$$P(a < Y < b) = \int_a^b f(y)dy$$

- ▶ As propriedades da função seguem as regras de probabilidades, ou seja:
 - ▶ A função é não negativa.

$$f(y) \geq 0$$

- ▶ A área total sob a curva é igual a 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)dy = 1.$$

Exemplo

Considere o experimento aleatório que consiste em verificar o surgimento de um defeito em uma pista de um trecho de rodovia com extensão de 20 km. Considere que existem razões para crer que a probabilidade da ocorrência de um defeito é constante para todo o trecho. Seja Y a variável aleatória que representa o km em que ocorreu o defeito.

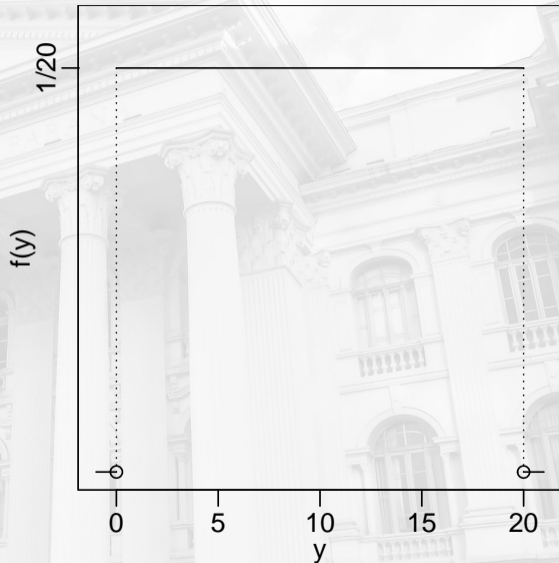
- a) Escreva a função densidade de probabilidade de Y .
- b) Verifique se as propriedades de uma função densidade de probabilidade são atendidas.

Exemplo

a) Escreva a função densidade de probabilidade de Y .

- ▶ Y : km em que ocorre o defeito.
- ▶ $y \in [0,20]$.
- ▶ Função densidade de probabilidade:

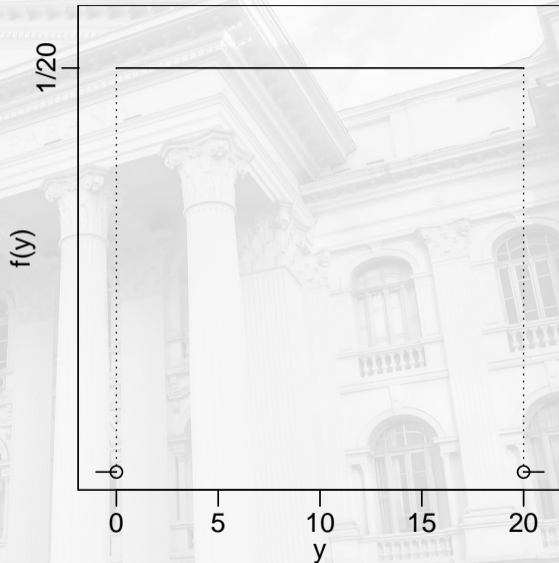
$$f(y) = \begin{cases} 1/20, & 0 < y < 20 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$



Exemplo

b) Verifique se as propriedades de uma função de probabilidades são atendidas.

- ▶ A função é não negativa?
 - ▶ Sim.
- ▶ A área total sob a curva é igual a 1?
 - ▶ Neste caso não se faz necessário o uso de integrais, basta calcular a área do retângulo.
 - ▶ $A = (b - a) \times f(y) = 20/(1/20) = 1$.



Função de distribuição acumulada

- ▶ Da mesma forma que no caso discreto existe a chamada função de distribuição acumulada.
- ▶ A função de distribuição acumulada $F(y)$ de uma v.a. contínua Y com densidade $f(y)$ é:

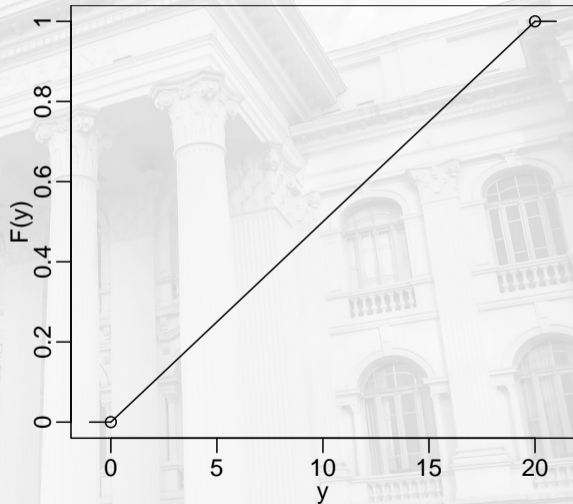
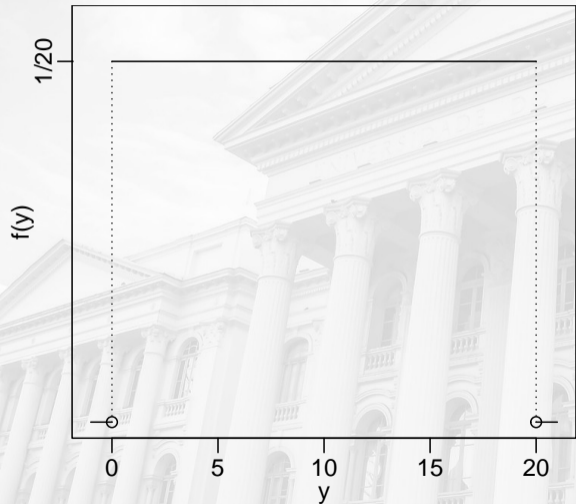
$$F(y) = P(Y \leq y) = \int_{-\infty}^y f(t) dt, \quad -\infty < y < +\infty.$$

- ▶ Como consequência, temos que:

$$P(a < Y < b) = F(b) - F(a).$$

Exemplo

De forma gráfica:



Esperança de uma v.a contínua

- ▶ A média, também chamada de valor esperado ou esperança, representa o ponto de equilíbrio da distribuição dos valores da variável aleatória.
- ▶ No caso contínuo, adapta-se a expressão discreta pois passamos a usar a integral e não mais o somatório.

$$\mu = E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy.$$

Variância de uma v.a contínua

- ▶ A variância, no caso contínuo, é dada pela integral dos desvios em relação a média ao quadrado, vezes a função de probabilidade.

$$\sigma^2 = E[(Y - \mu)^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu)^2 f(y) dy.$$

- ▶ De forma alternativa:

$$\sigma^2 = V(Y) = E(Y^2) - \mu^2.$$

- ▶ A raiz quadrada positiva da variância é chamada de desvio padrão de Y , denotado por σ .

Exemplo

Retomando o exemplo do defeito na pista:

- ▶ Y : km em que ocorre o defeito.
- ▶ $y \in [0,20]$.
- ▶ Função de probabilidade: $f(y) = \frac{1}{20}$.

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)dy = \int_a^b \frac{y}{20} dy = \frac{y^2}{2 \times 20} \Big|_0^{20} = 400/40 = 10$$

$$\sigma^2 = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(y) dy \right] - \mu^2 = \left[\int_0^{20} \frac{y^2}{20} f(y) dy \right] - 10^2 = \frac{y^3}{60} \Big|_0^{20} - 100 = 133,33 - 100 = 33,33$$

O que foi visto:

- ▶ Variáveis aleatórias discretas.
- ▶ Variáveis aleatórias contínuas.
- ▶ Esperança de variáveis aleatórias.
- ▶ Variância de variáveis aleatórias.

Próximos assuntos:

- ▶ Distribuições de probabilidades.